

Олимпиада по математике – 2017
9-10 классы
Заочный тур

1. Решите числовой ребус

$$\text{СОБАКИ} * 7 = \text{PPPPPP}.$$

Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры.

2. Число рабочих, уволенных по причине кризиса, составило от 1,8 до 2,7 % от числа всех рабочих цеха. Какое наименьшее число рабочих могло работать в этом цехе до кризиса?

3. Курсы доллара и евро в течение некоторой недели менялись следующим образом:

	евро	доллар
Понедельник	70 р	65 р
Вторник	75 р	68 р
Среда	80 р	65 р
Четверг	75 р	70 р
Пятница	70 р	65 р
Суббота	75 р	70 р

Начальный капитал имелся в рублях. Конечный – тоже должен быть в рублях. Курсы продажи и покупки считаются одинаковыми. Смена курса происходит в конце дня одномоментно. Капитал можно переводить в течение дня в доллары, евро или рубли. На сколько процентов максимально можно было бы увеличить за эту неделю капитал, играя на курсах валют?

4. Администратор гостиницы работает либо с 8 утра до 8 вечера, либо с 8 вечера до 8 утра, либо сутки с 8 часов (утра или вечера). В первом случае он отдыхает не меньше суток, во втором – не меньше полутора суток, в третьем – не меньше двух с половиной суток. Какое наименьшее количество администраторов должно работать в гостинице?

5. Найдите произведение всех целых решений уравнения

$$-2x^4 - x^3 + 32x^2 + 31x - 60 = 0.$$

6. В 16-литровой колбе находится смесь азота и кислорода, содержащая 16% кислорода. Из колбы выпустили некоторое количество смеси и добавили

столько же азота, затем снова выпустили такое же, как и в первый раз, количество новой смеси и добавили столько же азота. В итоге процентное содержание кислорода в смеси составило 2,5%. Сколько литров смеси выпускали каждый раз?

7. В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $AC=12$ и $BC=5$ проведена окружность S с центром в вершине B и радиуса 8. Найдите радиус окружности, вписанной в угол BAC и касающейся окружности S .

8. При всех значениях параметра a , найдите количество решений системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 - 2x + y^2 - 4y = 2|x + 2y - 5|, \\ 2x - y = a. \end{cases}$$

9. Найдите все возможные четырёхзначные числа, кратные 44, произведение цифр которых равно 40.

10. Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные AC и BD . Их точки касания с меньшей окружностью – A и B , с большей окружностью – C и D . Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AB = \frac{24}{5}$, $AC = 12$.

Олимпиада по математике – 2017

11 класс

Заочный тур

1. Составьте уравнение касательной к графику функции $y = x^3 - 3x^2$, имеющей единственную общую точку с графиком данной функции.

2. Некоторый капитал K_0 помещен в банк под $p\%$ годовых, начисляемых в конце каждого года. Ежегодно (после начисления процентов) вкладчик снимает со счета одинаковую сумму S . Что можно сказать о соотношении K_0/S , если известно, что через определенное время остаток более чем втрое превышал первоначальный взнос? Через сколько лет произойдет указанное утроение?

3. Найдите наименьшее значение выражения

$$\sqrt{x^2 + y^2 + 4x + 6y + 13} + \sqrt{x^2 + y^2 - 6x - 2y + 10}.$$

4. Найдите произведение всех целых решений неравенства

$$\frac{-2x^4 - x^3 + 32x^2 + 31x - 60}{-x^4 + 7x^3 + 12x^2 - 176x + 320} \leq 0.$$

5. Курсы доллара и евро в течение некоторой недели менялись следующим образом:

	евро	доллар
Понедельник	70 р	65 р
Вторник	75 р	68 р
Среда	80 р	65 р
Четверг	75 р	70 р
Пятница	70 р	65 р
Суббота	75 р	70 р

Начальный капитал имелся в рублях. Конечный – тоже должен быть в рублях. Курсы продажи и покупки считаются одинаковыми. Смена курса происходит в конце дня одномоментно. Капитал можно переводить в течение дня в доллары, евро или рубли. На сколько процентов максимально можно было бы увеличить за эту неделю капитал, играя на курсах валют?

6. В 16-литровой колбе находится смесь азота и кислорода, содержащая 16% кислорода. Из колбы выпустили некоторое количество смеси и добавили столько же азота, затем снова выпустили такое же, как и в первый раз, количество новой смеси и добавили столько же азота. В итоге процентное содержание кислорода в смеси составило 2,5%. Сколько литров смеси выпускали каждый раз?

7. В прямоугольном параллелепипеде $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ известны длины ребер $AA_1 = 15$, $AB = 12$, $AD = 8$. Точка K – середина ребра CD_1 , а точка L делит ребро BB_1 в отношении 4:1, считая от вершины B_1 . Найдите отношение, в котором плоскость LKA_1 делит ребро CC_1 , считая от вершины C .

8. Длина одного бокового ребра четырехугольной пирамиды равна x , длины всех остальных ребер принимают значение 1. Выразите объем пирамиды как функцию от x . Найдите x , при котором объем будет наибольшим.

9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} \sin x + 2\sin(x + y + z) = 0, \\ \sin y + 3\sin(x + y + z) = 0, \\ \sin z + 4\sin(x + y + z) = 0. \end{cases}$$

10. Найдите все значения параметра a , при каждом из которых система

$$\begin{cases} 19x^2 + 19y^2 = 1, \\ 2y - 1 \geq a - |x|. \end{cases}$$

имеет ровно 2 решения.